### Тема 4: Рекурентні співвідношення

Мета: Засвоєння методу розв’язання комбінаторних проблем за допомогою рекурентних співвідношень, розв’язання лінійних однорідних співвідношень у випадку простих коренів, у випадку кратних коренів, розв’язання неоднорідних співвідношень.

Теоретичні питання: Визначення рекурентного однорідного і неоднорідного лінійного співвідношення, розв’язок рекурентного співвідношення, властивості розв’язків, характеристичне рівняння.

Аудиторне завдання:

1. Розв’язати рекурентні співвідношення:
а) [4- 8.3.5.1]

б) [4- 8.3.3.1]

в) 

2. Знайти загальний розв’язок рекурентного співвідношення:


3. Знайти розв’язок неоднорідного рекурентного співвідношення:
[4- 8.3.5.2]

Домашнє завдання:

1. Знайти розв’язки рекурентних співвідношень, що задовольняють початковим умовам:

a) [4- 8.3.3.2]

b)  [4- 8.3.3.3]

c)  [2- стор.49, 4.а]

d)  [2- стор.49, 4.б]

2. Знайти загальні розв’язки рекурентних співвідношень:

a)  [2- стор.49, 4.а]

b)  [2- стор.49, 4.в]

Додаткове завдання:

1. У ряду Фібоначчі обрано 8 послідовних чисел. Довести, що їх сума не входить до цього ряду. [3- с.249,№410]

2. Чи знайдеться серед перших 100 000 001 чисел ряду Фібоначчі число, що закінчується чотирма нулями? [3- с.249,№409]

3. Для чисел Фібоначчі (ai) Довести a2+a4+ … +a2n=a2n+1-1 . [3- с.249,№411.a)]

4. Довести, що довільне натуральне число N можна представити у вигляді суми чисел Фібоначчі, причому кожне число входить до суми не більше одного разу, та ніякі сусідні числа не входять разом. [3- с.249,№412]

5. Довести, що послідовність з загальним членом an=nk задовольняє співвідношенню  . [3- с.250,№421]

6 Довести, що два сусідніх числа Фібоначчі взаємно прості. [3- с.249,№407.в)]

7. Довести, що .

8. Знайти розв’язки рекурентних співвідношень:
a) ;

b) .

9. Знайти розв’язок системи рекурентних співвідношень:



1. Знайти кількість частин, на які n кіл ділять площину, якщо кожні два кола мають спільну хорду та жодні три кола не перетинаються в одній точці. [5- с.47,№ 2]

### Тема 5: Твірні функції та рекурентні співвідношення

Мета: Застосування методів твірних функцій до розв’язання рекурентних співвідношень.

Теоретичні питання: Твірна функція послідовності. Лінійна комбінація та згортка. Твірні функції для рекурентних співвідношень.

Аудиторне завдання:

1. Знайти твірні функції та розв’язки рекурентних співвідношень:
а) 

б) 

в) 

2. Знайти твірну функцію та розв’язок рекурентного співвідношення:
[4- 8.3.5.2]

3. Знайти твірну функцію та розв’язок рекурентного співвідношення:


Домашнє завдання:

1. Знайти твірні функції та розв’язки рекурентних співвідношень:
2. [2- стор.49, 4.а]
3. [4- 8.3.3.2]
4. [2- стор.49, 4.б]

2. Знайти твірні функції та розв’язки рекурентних співвідношень:

1.  [4- 8.3.5.1]
2. 

Додаткове завдання:

1. Знайти твірну функцію послідовності .

2. Застосувати техніку твірних функцій для знаходження суми чисел 13+23+…+n3 .

3. На колі обрано 2n точок. Скількома способами можна з’єднати ці точки n хордами, що не перетинаються у середині кола?

4. Нехай A – (n\*n) матриця з нулями на головній діагоналі та одиницями на інших місцях. (Можна довести, що детермінант A дорівнює .) Скільки з n! доданків у розкладі детермінанта A дорівнюють +1, -1 та 0 відповідно?

5. «Задача о подружніх парах» полягає у наступному: господарка бажає розсадити n подружніх пар за круглим столом так, щоб чоловіки та жінки чергувались, але при цьому жодний чоловік не сидів поруч зі своєю дружиною. Скількома способами це можна зробити?

6. Знайти n, якщо відомо, що у розкладі (1+x)n коефіцієнти при x5 та x12 рівні.

7. Знайти кількість перестановок з n елементів, де жодний елемент не зберігає початкового положення.

8. Пустелею рухається караван з 9 верблюдів. Мандри є тривалими. Скількома способами можна переставити верблюдів так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший ніж раніше.

9. На каруселі знаходяться n дітей. Скількома способами їм можна пересісти так, щоб попереду кожної дитини була інша дитина ніж раніше?

10. Скількома способами опуклий n-кутник можна розбити на трикутники діагоналями, що не перетинаються всередині n-кутника? [5- с.73,№ 18]